Обзор вариантов ЕГЭ 2004 - 2009 г.

Материалы курсов подготовки к ЕГЭ «Математика с человеческим лицом»

Составитель: Любецкая Е.В.

Обзор части 1, заданий В1- В3.

<Часть 1>

А1, А3 «Действия со степенями»

Типовые задания: 1) $\frac{5^{6,8}}{5^{1,2}}$, 2) $\sqrt[3]{5^9 a^{12}}$ 3) $-3c^{\frac{10}{7}}+2\left(c^{\frac{5}{7}}\right)^2$ 4) $\frac{7^{5c+1}}{7^{2c}}$, при $c=-\frac{1}{3}$.

5) $\sqrt[3]{24\cdot 9}$ 6) $\sqrt[4]{625\cdot 0{,}0016}$ 7) $\frac{5\cdot\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{136}}$.

Более сложные задания: 1) $\frac{\sqrt{a\sqrt{a^3}}}{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a}}=a^{?}$, 2) $\frac{\sqrt[3]{27n^9}}{\sqrt[6]{(n+2)(n+2)^5}}$ при $n<4$.

А2 «Действия с логарифмами»

Типовые задания: 1) $\log_4 c=-3{,}5$; $\log_4(64c)=?$; $\log_4\left(\frac{16}{c}\right)=?$, $\log_4\left(c^6\right)=?$

2) $\log_{\frac{1}{7}}245+\log_{\frac{1}{7}}\frac{1}{5}$; 3) $\log_6 180-\log_6 5$; 4) $0{,}4\cdot 0{,}3^{\log_{0,3}25}$.

Более сложные задания: 1) $\log_a 16=4$, $2^{\log_2 4\cdot\log_4 a}=?$; 2) $\frac{\log_4 81\cdot\log_{1,5}2{,}25}{\log_4 3}$

А4. «Элементарные свойства функции, опознание графика функции»
Типовые задания: найти: четную/нечетную функцию, множество значений функции, промежутки возрастания функции.

Найти график функции (выбрать один из четырех графиков): $y=\log_2 x$, $y=\left(\frac{1}{3}^{x}\right)$,

$y=\frac{x-1}{x}$, $y=3^{x-1}$, $y=1-5^{x+1}$.

А5. Множество значений функции

Типовые задания: $E_f=?$; $f(x)=5-2\cos 5x$, $f(x)=\log_3(2x-1)+7$,

$f(x)=3^x+10$, $f(x)=7-\left(\frac{1}{5}\right)^x$, $f(x)=(x-1)(2-x)$.

Более сложные задания: 1) $E_f = ?$; $f(x) = tgx - 4$, $f(x) = \arcsin x - 5$, $f(x) = \log_7\left(x^2 + 49\right)$; $f(x) = 3 - \log_{\frac{1}{3}} x^2$.

А6. «Графическое решение неравенств»

Типовые задания: По графику функций $f(x)$, $g(x)$ решить неравенства: 1) $f(x) \le g(x)$, 2) $f(x) \ge -1$; 3) $-1 \le f(x) < 5$.

Более сложные задания: По графику функции $f(x)$ решить неравенство: 1) $f(x) \le x$; 2) $|f(x)| \le 1$

А7. «Решение простейших тригонометрических уравнений»

Типовые задания: 1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$, 2) $\sin \frac{x}{4} = 1$; 3) $tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1$; 4) $\sin \frac{\pi x}{3} = 0$.

Более сложные задания: 1) $\cos x = \sqrt{3} \sin x$ 2) $\sin 2x \cos 2x + 0{,}5 = 0$.

А8-А9. «Решение неравенств»

Типовые задания: 1) $\frac{x+8}{(x-4)(7x+5)} \ge 0$; 2) $3^{1-2x} \le 81$;

3) найти D_f, $f(x) = \sqrt{2 - \log_5 x}$, $f(x) = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - \frac{1}{4}}$; $f(x) = \frac{1}{3 - \sqrt[4]{x}}$; $f(x) = \log_2\left(4 - x^2\right)$.

4) $\log_{\frac{2}{7}}(2x - 9) > \log_{\frac{2}{7}} x$, 5) $\log_{\frac{7}{2}}(4x - 6) < 0$.

Более сложные задания: 1) найдите сумму таких ***x***, что. $x \in Z$, $x \in [-5;\, 7]$, $x \in D_f$, где $f(x) = \sqrt{2 - \log_2\left(2 + 4x - x^2\right)}$.2) найти D_f, $f(x) = \sqrt[4]{3^{\frac{x-1}{x+1}} - 1}$.

А10. «Производная функции»

Типовые задания: 1) $y' = ?$, $y = x^6 - 2\sin x$, $y = \frac{x+4}{\cos x}$, $y = x^3 \sin 2x$.

2) Точка движется по прямой, причем пройденный путь определяется формулой $S(t) = 2t - 21 + t^4$. Найти ее скорость в момент $t = 3$.

3) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{1 - 2x}{4x + 1}$, проведенной в точке с абсциссой –0,5.

В1, В2. «Решение уравнений»

Типовые задания: 1) $4^{x+1}+8\cdot 4^{x}=3$, 2) $12\cdot 3^{x-1}-11\cdot 3^{x}+189=0$;
3) $-x\cdot 3^{2x}+81\cdot 3^{2x}=0$; 4) $5\cdot 10^{\lg x}+15=7x$;
5) $\log_9(20x-16)-\log_9 4=\log_9 18$; 6) $\sqrt{11x^2-490}=-x$

Более сложные задания: 1) $8\log_9^2\sqrt{x-4}=\log_9(x-4)$;
2) $\sqrt{x^2-4x-21}=21+4x-x^2$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{(4x-11)(1-x)-3}=27^{x^2}$ (найти сумму корней).

4) $5x+\sqrt{3+x+5x^2}=2$. 5) $x^2-9x+4-\left(\frac{\sqrt{7+x}}{\sqrt{7-x}}+\frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{7+x}}\right)\cdot\sqrt{49-x^2}=0$;

6) $3\cdot 5^{\frac{3x+2}{2x}}+10\cdot 5^{\frac{x+2}{2x}}=125$.

<u>В3.</u> Типовые задания: **«Задача на вычисление площади»**.

1. Спортзал имеет форму прямоугольного параллелепипеда с основанием 16 на 25 метров и высотой 8 метров. В зале имеются 8 окон размером 4м на 3 м каждое и две двери размерами 2м на 2,5 метра. Требуется нанести специальное покрытие на стены зала. Найдите стоимость этих работ в тысячах рублей, если квадратный метр покрытия стоит 200 рублей, приобрести покрытие надо с запасом 10%, а стоимость работ по нанесению покрытия составляет 70% от стоимости нанесенного покрытия.

2. Для оклейки стен комнаты требуется приобрести обои. Ширина комнаты составляет 4 метра, длина – 5 метров, а высота – 3 метра. В комнате есть окно размером 3 метра на 2 метра и дверь размером 1,05 метра на 2 метра. Длина рулона обоев равна 10,5 метров, ширина – 0,6 метров. До 15% купленных обоев идет в отходы из-за состыковки рисунка и не использованных узких полос. найдите минимальное число рулонов обоев, которое необходимо приобрести для оклейки комнаты.

«Преобразование тригонометрических выражений»

1) Найдите значение выражения $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-4\cos(\pi-\alpha)$, если $\cos\alpha=-0{,}4$;

2) Найдите значение выражения $5\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}1$;

3) Найдите значение выражения $\sqrt{21}\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\sqrt{\frac{5}{21}}$, $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$;

4) Найдите значение выражения $\frac{2tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{7ctg(\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

Более сложные задания: 1) Найти значение выражения $\sqrt{3}\cdot\frac{\sin 60^\circ\cdot\sin 48^\circ}{1-2\cos^2 21^\circ}$;

2) Найдите число корней уравнения $(\cos^2 2x-1)\sqrt{36-x^2}=0$;

3) Вычислить $\left(tg\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)\right)^{-2}$

Задания В4, В6

В4. Преобразование выражений

Типовые задания:

Системы уравнений (сводимые к линейным):

1) Найдите значение выражения $3^y - x$, если $(x;\ y)$ является решением системы уравнений
$$\begin{cases} 4x - 2\cdot 3^y = -94 \\ 3x + 4\cdot 3^y = 78. \end{cases};$$

2) Найдите значение выражения $x + y$, если $(x;\ y)$ является решением системы уравнений
$$\begin{cases} 5\log_{\frac{1}{7}} x - 3\log_7 y = -16 \\ 7\log_7 x + 3\log_7 y = 20. \end{cases};$$

3) Найдите значение выражения $\cos y$, если $(x;\ y)$ является решением системы уравнений
$$\begin{cases} x + y = \dfrac{3\pi}{2} \\ 8\sin x - 2\cos y = 7. \end{cases}$$

Уравнения, сводимые к квадратным:

1) $\sqrt{10x+25} + \sqrt[4]{10x+25} = 30$.

2) $25^x + 4\cdot 5^{x+1} = 125$.

3) $\log_2^2 \dfrac{x+23}{6x} + \log_2 \dfrac{x+23}{6x} = 6$.

Более сложные задания:

Решите уравнения. Если корней несколько, укажите в ответе их произведение.

1) $\dfrac{1}{x(x+4)} - \dfrac{1}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{15}$

2) $\lg(4x)\cdot\log_2 x = \lg 8$

3) $2\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} - \left(x^2-6x+9\right)^{1/2} = 2$.

Логарифмические выражения:

Вычислите: 1) $\log_{\sqrt{2}} \sin\dfrac{\pi}{8} + \log_{\sqrt{2}} \sin\dfrac{\pi}{4} + \log_{\sqrt{2}} \sin\dfrac{3\pi}{8}$;

2) $\log_2 \sin\dfrac{\pi}{8} + \log_2 \sin\dfrac{3\pi}{8}$;

3) $4\log_{5\cdot\sqrt[7]{5}}\left(125\cdot\sqrt[7]{5}\right)$;

4) $13\log_{9\cdot\sqrt[6]{3}}\left(27\cdot\sqrt[6]{3}\right)$;

5) $\lg 25+\lg\left(\dfrac{10^{\sqrt{7}-1}}{2^{\sqrt{7}+1}\cdot 5^{\sqrt{7}+3}}\right)$

6) $\log_3\left(\dfrac{1}{64}\right)-\log_3\left(\dfrac{12^{\sqrt{6}-1}}{2^{\sqrt{6}+1}\cdot 6^{\sqrt{6}+3}}\right)$

7) $-10^{\lg 5}+225^{\log_{15}\sqrt{11}}$.

С дробными степенями:

Вычислите:

1) $\dfrac{16-p^{-1}}{4+p^{-0,5}}-10p^{0,5}$ при $p=4$;

2) $\dfrac{25-d^{-1}}{5+d^{-0,5}}-4d^{0,5}$ при $d=64$;

3) $36\cdot\left(3.2\sqrt[5]{216\sqrt{216}}+2.8\sqrt{6\sqrt[5]{36^2}}\right)^{-\frac{10}{19}}$;

4) $\left(2.25\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}-\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}}\right)^{-\frac{12}{23}}$;

Тригонометрические:

Вычислите:

1) $2\sqrt{3}\cos\dfrac{19\pi}{3}\cos\dfrac{13\pi}{6}$;

2) $2\sqrt{6}\cos\dfrac{25\pi}{4}\cos\dfrac{8\pi}{3}$

.

Задания на раскрытие модуля:

1) Найдите значение выражения $\sqrt{9-6\cdot 4^x+16^x}-4^x-0,5$, если $3^x=7$.

2) Найдите значение выражения $3\sqrt{3}-\sqrt[4]{\left(43-24\sqrt{3}\right)^2}$.

3) Найдите значение выражения $\log_5\left(12,5\sqrt{5}\right)-\left(\log_5^2 2+1-\log_5 4\right)^{0,5}$.

Более сложные задания: 1) Найдите $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0,4$;

2) Вычислите: $6\cdot\log_{4\sqrt{2}}81\cdot\log_{27}16+\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 169}$;

3) $\frac{6}{5}\cdot\frac{\log_{36}64\cdot\log_8 216}{\log_{\sqrt{5}}49\cdot\log_7\frac{1}{5}}$;

4) Вычислите: $\log_2\left(12+2\log_2\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\log_2 12-\log_2^2 3\right)$;

5) Вычислите: $\frac{\log_3\left(12tg\frac{\pi}{4}\right)}{4\log_{12}3}-\frac{\log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}tg\frac{\pi}{3}\right)}{\log_2 3}$;

6) Вычислите: $\frac{2\log_3 8100}{\lg 3}-\log_3^2 900$;

4) Вычислите $\sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2}+\sqrt{43+30\sqrt{2}}$;

5) Вычислите $\sqrt[3]{81\sqrt{2}-54\sqrt{5}}\cdot\sqrt[6]{38+12\sqrt{10}}\cdot\sqrt[6]{16}$;

6) Вычислите $\frac{\left|\log_{0,5}\left(tg\frac{\pi}{3}\right)\right|}{\log_{0,5}\left(tg\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{3\cdot\left|3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right|}{3\sqrt{3}-2\sqrt{7}}+\frac{9\cdot\left|\arccos(-0,5)-\frac{\pi}{2}\right|}{\arccos(-0,5)-\frac{\pi}{2}}$;

7) Вычислите

$$3\sin 21^\circ\sin 225^\circ\left(\sin^2 12^\circ-\cos^2 12^\circ\right)+6\sin 69^\circ\cos 45^\circ\sin 12^\circ\cos 12^\circ$$

8) Вычислите

$$9\sin 29^\circ\sin 225^\circ\left(\sin^2 8^\circ-\cos^2 8^\circ\right)+18\sin 61^\circ\cos 45^\circ\sin 8^\circ\cos 8^\circ$$

B6 – Различные задания

Типовые задания: 1) Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\frac{10+3x-x^2}{1+\log_2^2 x}\geq 0$

2) Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\frac{10+3x-x^2}{2+\sqrt[4]{x}}\geq 0$?

3) Сколько целых чисел являются решениями неравенства $\frac{8+2x-x^2}{tg^2\frac{\pi x}{4}+8}\geq 0$.

4) Сколько целых чисел являются решениями неравенства $\frac{8+2x-x^2}{ctg^2\frac{\pi x}{4}+2}\geq 0$.

5) Решите неравенство $\left(-x^2+3x+10\right)\left(3+\sqrt{\sin\frac{\pi x}{2}-1}\right)\geq 0$.

5) Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y=\sqrt{49-x^2}$ на отрезке $\left[-2\sqrt{10};\, 2\sqrt{6}\right]$.

6) Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y=\sqrt{81-x^2}$ на отрезке $\left[-3\sqrt{5};\, 4\sqrt{2}\right]$.

7) Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y=5^{x^2-2}$ на отрезке $\left[-1;\, 2\right]$.

8) Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y=2{,}6\log_{\frac{1}{5}}\left(25-4x^2\right)$ на отрезке $\left[-2;\, \sqrt{5}\right]$.

9) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+1$, $x=0$, $y=2$.

10) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2x+1$, $y=x^2-2x+1$, $y=4$.

Производная функции (B5). Элементарные свойства функций (B8).

1. Задания на использование свойств производной функции (B5)

1. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке O $(4; -8)$. Найдите $f'(4)$.

Ответ: -2

2. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке O $(2; 3)$. Найдите $f'(2)$.

Ответ: 1,5

3. Известно, что прямая $y = 4x - 1$ является касательной к параболе $y = x^2 + c$. Найдите ординату точки касания прямой и параболы.

Ответ: 7

4. Известно, что прямая $y = 2x + 3$ является касательной к параболе $y = 2x^2 + c$. Найдите *c*.

Ответ: 3,5

2. Задания на использование свойств функции (В8)

1. Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной *x* значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(x+1)(x+3)(x-7)$. Найдите значение $h(x) = \dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)-g(x)}$ при $x = -3$.

Ответ: 1

2. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Ее период равен 3 и $f(0) = 4$. Найдите значение выражения $2f(3) - f(-3)$.

Ответ: 4

3. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке $[0;\ 3]$ функция задана равенством $g(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-3;\ 5]$.

Ответ: 3

4. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной периодической функцией с периодом, равным 4. На отрезке $[-2;\ 0]$ функция задана равенством $g(x) = -x^2 - 2x$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке $[-5;\ 3]$.

Ответ: 4

Более сложные задачи:

5. Найдите произведение всех значений параметра а, при которых наименьший положительный период функции $y = \cos((13-3a)x)$ равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Ответ: 17

6. Найдите произведение всех значений параметра а, при которых наименьший положительный период функции $y = tg((5a+8)x)$ равен $\dfrac{\pi}{3}$.

Ответ: 2,2

7. Непрерывная нечетная функция определена на всей прямой. На интервале $(-\infty;\ 0)$ функция имеет 4 нуля. Сколько нулей имеет функция на всей прямой?

Ответ: 9

Комбинированные уравнения (задание В7)

Здесь мы рассмотрим уравнения, левая и правая часть которых является разнородными функциями (например, одна из частей является тригонометрическим или логарифмическим уравнением, а другая – многочленом или иррациональным уравнением). Такие уравнения мы будем решать методом подбора корня. Полное решение также включает в себя доказательство единственности найденного корня. Доказывать единственность можно, оценивая минимальное и максимальное значение левой и правой части уравнения или используя эскиз графика левой и правой части.

<u>Типовые задания:</u>

1. Решите уравнение $4x^2 - 4x + 4 = \left(\sqrt{3} - \cos \pi x\right)\left(\sqrt{3} + \cos \pi x\right)$.

<u>Ответ:</u> 0,5

2. Решите уравнение $36x^2 - 36x + 11 = \left(\sqrt{2} - \cos \pi x\right)\left(\sqrt{2} + \cos \pi x\right)$.

<u>Ответ</u>: 0,5

3. Решите уравнение $\sqrt{16 + (2x-3)^2} = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$.

<u>Ответ:</u> 1,5

4. Решите уравнение $\sqrt{9 + (2x+7)^2} = 3 - \cos^2 \frac{3\pi x}{7}$.

<u>Ответ:</u> -3,5

5. Решите уравнение $2^{\left(\sqrt{2} - \cos 15\pi x\right)\left(\sqrt{2} + \cos 15\pi x\right)} = 4 + (10x+1)^2$.

<u>Ответ:</u> -0,1

6. Решите уравнение $3^{\left(\sqrt{2} - \sin 15\pi x\right)\left(\sqrt{2} + \sin 15\pi x\right)} = 9 + (5x+3)^2$.

<u>Ответ:</u> -0,6

7. Решите уравнение $0{,}1^{-x} = \sqrt{x+1}$.

<u>Ответ:</u> 0

8. Решите уравнение $3^{1-2x} = \sqrt{x+9}$.

<u>Ответ:</u> 0

9. Решите уравнение $(0{,}2)^{3-2x} = \sqrt{27 - x}$.

<u>Ответ:</u> 2

10. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = \sqrt{x-3}$.

<u>Ответ:</u> 4

11. Решите уравнение $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}x - 2\right)^2 = \sqrt{4x - 40}$.

<u>Ответ:</u> 11

<u>Более сложные уравнения:</u>

12. Решите уравнение $\sqrt{0{,}75-\sin^2\frac{\pi x}{12}+\sin\frac{\pi x}{12}}=17-8x^2+x^4$

Ответ: 2

13. Решите уравнение $\sqrt{3{,}5-2\sin^2\frac{\pi x}{3}+2\sin\frac{\pi x}{3}}=2{,}5-4x^2+8x^4$.

Ответ: 0,5

14. Решите уравнение $\cos\frac{2\pi x}{3}=3^{\sqrt{x^2-6x-27}}$.

Ответ: -3; 9

15. Решите уравнение $\cos\frac{\pi x}{x+4}=2^{2x-5}$.

Ответ: 2

16. Решите уравнение $\log_{0,2}(2x-1)=2x^2-x-16$.

Ответ: 3

17. Решите уравнение $\log_{0,25}(3x+2)=2x^2+5x-19{,}5$.

Ответ: 2

18. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения

$4\cdot 2{,}5^{7-x}=21+\sqrt{3x+1}$

Ответ: 5

19. Решите уравнение $\sqrt{\log_{13}(5x-x^2-3)}=2^{x+2}-64$.

Ответ: -4

2. Уравнения с неотрицательной правой частью, равной нулю.

Здесь равенство возможно в единственном случае – когда левая часть равна нулю. В левой части может стоять сумма четных степеней некоторых выражений.

19. Решите уравнение

$(x^4-9x^3+x^2-8x-9)^4+(0{,}25\cdot\log_3^2 x^2-3\cdot\log_3 x+2)^2=0$.

Ответ: 9

20. Решите уравнение $\lg^2(x^2+x-5)+\sqrt{-x^3+9x-10}=0$.

Ответ: 2

21. Решите уравнение: $\log_3^2(2005x^3+2004x^2+2)+\sqrt{5^{x^2}-5}=0$.

Ответ: -1

3. Уравнения, в которых произведение равно нулю.

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю, а второй существует. «Хитрость» таких примеров состоит в том, что нужно не забыть про проверку существования второго множителя.

22. Решите уравнение $\left(2^{x^2-61}-8\right)\cdot\ln\left(x^7\right)=0$.
Ответ: 8, 1

23. Решите уравнение $\sqrt[4]{25-x^2}\cdot\lg\left(16-2x-x^2\right)=0$.
Ответ: -5, 3,

Более сложные уравнения:

24. Найдите число положительных корней уравнения $\left(ctg\,\dfrac{2\pi}{x}\right)\cdot\sqrt{13x^2-2x}=0$.

Ответ:13

25. Найдите число положительных корней уравнения $\left(tg\,\dfrac{\pi}{x}\right)\cdot\sqrt{10x^2-x}=0$

Ответ: 10

4. Уравнения, в которых легко потерять корни

В этих уравнениях обычно участвуют модули или квадраты некоторых выражений, из-за чего можно «потерять» корни

26. Найти корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения
$\log_3^2(x+15)^4=8\log_3(x+15)^2$
Ответ: -16, -14

27. Решите уравнение $\log_3^2\left(x^4\right)-12\log_3\left(x^2\right)=16$.

Ответ: $\left\{\pm 81, \pm\dfrac{1}{3}\right\}$

Уравнение с параметром, содержащее модуль (В8).

1. Найти все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение $||x|+5-a|=2$ имеет ровно три корня. Если таких значений несколько, то запишите в ответе их сумму.

Ответ: $a=7$

2. Найти все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение $||x|+a-9|=a^2$ имеет ровно три корня. Если таких значений несколько, то запишите в ответе их произведение.

Ответ: -9

3. Найти все целые значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение $||x|-4a|=5a-9$ имеет ровно четыре корня. Если таких значений несколько, то запишите в ответе их сумму.

Ответ: 35

4. Найти все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение $|x^2+6x+8+a|=7$ имеет ровно три корня. Если таких значений несколько, то запишите в ответе их сумму.

Ответ: -6

5. Найти все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение $||x-a|-2|=x+4$ имеет ровно бесконечное количество корней. Если таких значений несколько, то запишите в ответе их сумму.

Ответ: -8

6. Найти все значения параметра *а*, при каждом из которых графики функций $y=\sqrt{x^2-4ax+4a^2}$ и $y=\sqrt{x}-3$ имеют ровно ровно одну общую точку. Если таких значений несколько, то запишите в ответе их сумму.

Ответ: $4{,}5$

Текстовые задачи (задание B9*)

Проценты:

1. Каков ежегодный процент по вкладу в банке, если вкладчик, положивший в банк 5000 рублей, через 3 года получил 1655 рублей дохода?
Ответ: 10%

2. Каков ежегодный процент по вкладу в банке, если вкладчик, положивший в банк 20000 рублей, через два года получил 5992 рубля дохода?
Ответ: 14%

3. В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена товара, если выставленный на продажу за 5000 рублей, он через два месяца стал стоить 1800 рублей.
Ответ: 40%

4. Некоторая сумма была помещена в банк и после периода хранения проценты, начисленные на вклад, составили 150 рублей. Владелец вклада снял со счета 350 рублей. После второго периода хранения и начисления процентов сумма на вкладе стала равной 920 рублям. Сколько процентов начислялось по вкладу, если процентная ставка банка для первого и второго периода хранения была одинакова?
Ответ: 15

5. За год овощной набор, состоящий из картофеля, моркови и свеклы, подорожал на 10% причем цена картофеля выросла на 10%, цена моркови снизилась на 10%, а свекла подорожала на 20%. Сколько процентов исходной стоимости набора составляла стоимость картофеля, если стоимость свеклы в наборе составляла 30%?
Ответ: 55%

6. Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважины относятся как 7:6:5. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 4%, из второй – на 2%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой за год нефти не изменился?
Ответ: 8

7. Набор химических реактивов состоит из трех веществ. Массы первого, второго и третьего веществ в этом наборе относятся как 3:7:10. Массу первого вещества увеличили на 8%, а второго – на 4%. На сколько процентов надо уменьшить массу третьего вещества, чтобы масса всего набора не изменилась?
Ответ: 5,2

8. После проведения санитарной обработки на базе отдыха количеств мух уменьшилось на 9%, а количество комаров – на 4%. В целом количество насекомых уменьшилось на 5%. Сколько процентов от общего числа насекомых составляли комары?
Ответ: 80

Работа, движение

1. Два фермера, работая вместе, могут вспахать поле за 25 ч. Производительности труда первого и второго фермеров относятся как 2:5. Фермеры планируют работать поочередно. Сколько времени должен проработать первый фермер, чтобы это поле было вспахано за 45,5 часов.
Ответ: 28

2. Отец с сыном должны вскопать огород. Производительность труда у отца в два раза больше, чем у сына. Работая вместе, они могут вскопать весь огород за 4 часа. Однако вместе они проработали только один час, потом некоторое время работал один сын, а заканчивал работу уже один отец. Сколько часов в общей сложности проработал на огороде отец, если вся работа была выполнена за 7 часов?
Ответ: 4 ч.

3. Две бригады, работая одновременно, должны выполнить некоторую работу. Поскольку производительность второй бригады оказалась на 30% ниже плановой, для выполнения задания в срок первой бригаде пришлось увеличить свою производительность на 20% по сравнению с плановой. Какую часть всей работы должна была выполнить первая бригада согласно плану?
Ответ: 0,6

4. Карлсон один может съесть 7 банок с вареньем за 14 минут, а вдвоем с Сиропчиком они съедают 10 банок с вареньем за 12 минут. На сколько процентов скорость съедания варенья Карлсона выше, чем у Сиропчика?
Ответ: 50.

5. Незнайка получил ящик мороженного, в котором находилось 240 порций эскимо. Нейзнайка честно поделил мороженное пополам с Пестреньким. Сильно испачкавшись, Пестренький съел все свое мороженное за 24 минуты, опередив Незнайку на 16 минут. На сколько процентов должен был бы увеличить долю друга Незнайка, чтобы они справились с мороженным одновременно?
Ответ: 25

6. Два каменщика могут выложить стену за 6 часов. Через три часа после начала работы второй каменщик получил травму и ушел, после чего первый закончил работу за 4 часа. Сколько потребовалось бы второму каменщику, если б он работал один.
Ответ: 24

7. Расстояние между пристанями A и B по реке равно 36 км. Из A и B отплыл плот, а из B в A спустя 8 часов отошла лодка. В пункты назначения они прибыли одновременно. Какова скорость плота, если собственная скорость лодки 12 км. в час?
Ответ: 3

8. Из пункта A и пункт B выехал мотоциклист и одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Мотоциклист прибыл в B через 2 часа после встречи, а велосипедист в A через 4,5 часа после встречи. сколько часов в пути был мотоциклист?
Ответ: 1,5

9. Из двух пунктов A и B, расстояние между которыми 540 км, навстречу друг другу выехали два автомобилиста. Второй едет со скоростью на 15 км/ч меньшей, чем первый. Через некоторое время он останавливается на 45 минут. после остановки он увеличил скорость на 20 км/ч и ехал до встречи с первым втрое дольше, чем до остановки. Сколько часов первый автомобилист ехал до встречи со вторым, если второй проехал 240 км?
Ответ: 3,75

Растворы, смеси

1. Сколько мл воды нужно добавить к 500 мл. 96%-ного раствора спирта, чтобы получить 40%-ный раствор спирта?
Ответ:700

2. Свежие грибы содержат по массе 90% воды, а сухие – 12%. Сколько получится сухих грибов из 44 кг. свежих?
Ответ: 5

3. При смешивании 2 кг. 70%-ного раствора щелочи с 6 кг раствора той же щелочи поучился 40% раствор щелочи. Какова была концентрации щелочи в добавленном растворе.
Ответ: 30

4.Из сосуда, доверху наполненного 91%-м раствором кислоты, отлили 2 литра жидкости и долили 2 литра 55%-го раствора этой же кислоты. После этого в сосуде получился 79%-й раствор кислоты. Сколько литров раствора вмещает сосуд?
Ответ: 6

3. Из сосуда, доверху наполненного 88%-м раствором кислоты, отдали 2,5 литра жидкости и долили 2,5 литра 60%-го раствора этой же кислоты. После этого в сосуде получился 80%-й раствор кислоты. Найдите вместимость сосуда в литрах.
Ответ: 8,75

Геометрия группы В

Планиметрия (задание В11*)

1. Сторона правильного многоугольника ABCDEFGH равна $\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник MNPK, если точки M, N, P, K – середины сторон AB, CD, EF, GH соответственно.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

2. Сторона правильного восьмиугольника ABCDEFGH равна 6. Найдите радиус окружности, описанной вокруг четырехугольника MNPK, если точки M, N, P, K – середины сторон AB, CD, EF, GH соответственно.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$

3. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 30 градусов, а площадь равна 72, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.
Ответ: 3

4. В параллелограмме меньшая сторона равна 6, меньшая диагональ равна 5, высота, опущенная на большую сторону, равна 3. Найдите площадь параллелограмма.
Ответ: $12+9\sqrt{3}$

5. Равнобедренная трапеция описана около окружности. Площади круга и трапеции равны соответственно $\dfrac{7}{4}\pi$ и $4\sqrt{7}$. Найдите боковую сторону трапеции.

Ответ: 4

6. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: 14

7. В параллелограмме ABCD биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр треугольника CDP, если DK=18, PK=24, AD=15.
Ответ: 112

8. Площадь равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равна 160, боковая сторона равна 20. Высоты BK и AH пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABO.
Ответ: 60

9.Основание BC равнобедренного треугольника ABC равно 24, а площадь равна 192. Биссектриса угла B пересекает медиану AM в точке K. Найдите BK.

Ответ: $6\sqrt{5}$

10. Биссектриса угла при основании AC равнобедренного треугольника ABC, пересекает медиану BK в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если AC=24, а MK:KB=3:5.
Ответ: 192

11. Найдите сторону правильного восьмиугольника ABCDEFGH, если площадь треугольника ADG равна $4+3\sqrt{2}$.
Ответ: 2

12. В параллелограмме ABCD со стороной AD=32 проведена биссектриса угла A, проходящая через точку P на стороне BC. Найдите периметр трапеции APCD, если ее средняя линия равна 19, а диагональ PD=$\sqrt{673}$.
Ответ: 103

13. В ромбе ABCD с площадью 10 котангенс угла B равен 2,4. Высота AE пересекает диагональ BD в точке F. Найдите площадь треугольника ABF.
Ответ: 2,4

14. Найдите периметр треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию с разностью 7, если известно, что произведение радиусов вписанной и описанной окружности равно 40.
Ответ: 51

15. В четырехугольнике ABCD длина стороны AB=12, синус угла BAC равен 0,33, синус угла ADB равен 0,44. Сумма углов BAD и BCD равна 180 градусов. Найдите длину стороны BC.
Ответ: 9

16. В треугольнике ABC на стороне AB=12 выбрана точка D таким образом, что AD=3. Найдите площадь треугольника ACD, если угол BAC равен 30 градусов, углы ACD и ABC равны.
Ответ: 4,5

17. В равнобедренной трапеции ABCD длина боковой стороны равна $2\sqrt{2}$, площадь трапеции рана 20, угол A при основании трапеции равен 45 градусов., O – точка пересечения диагоналей, а K – точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции. Найдите длину отрезка KO.
Ответ: 4,8

18. Дан параллелограмм ABCD, сторона AB которого в 4 раза короче стороны BC. На стороне AD выбрана точка M так, что углы DCM и BCA равны. Найдите площадь параллелограмма ABCD, если площадь треугольника ACM равна 15.
Ответ: 32

19. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B и углом A равным 30 градусов вписан в окружность радиуса $13\sqrt[4]{3}$. На отрезке AC выбрана точка м так, что AM:MC= 5:3. Прямая BM вторично пересекает окружность в точке D. Найдите площадь четырехугольника ABCD.
Ответ: 546

20. В треугольнике ABC сторона AC равна 16, угол C равен 30 градусов. Через точки A и B проведена окружность так, что она касается стороны BC и делит AC в отношении 3:1, считая о вершины A. Найдите расстояние от точки B до стороны AC.
Ответ: 4

21. В окружности проведены хорды AB=1 и AC=2. Угол BAC=$2\arccos\frac{1}{4}$. Хорда AD – биссектриса угла BAC. Найдите длину хорды AD.
Ответ: 6

22. Из вершины B параллелограмма ABCD проведен луч, который пересекает сторону CD в точке T и диагональ AC в точке N. Площадь треугольника BCN равна 5, а площадь треугольника CTN равна 2. Найдите площадь параллелограмма.
Ответ: 35

Стереометрия (задание В10*)

1.Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ - треугольник АВС, в котором $\angle C = 60^\circ$, $AB = BC = \sqrt{3}$. На ребре BB_1 отмечена точка Р так, что $BP:PB_1=2:3$. Найдите угол между плоскостями АВС и АРС, если площадь боковой поверхности призмы равна $\frac{135}{8}$.

Ответ: 45°

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6, а площадь полной поверхности пирамиды равна $27\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

Ответ: $27\sqrt{3}$

3. В правильной шестиугольной пирамиде радиус окружности, описанной вокруг основания, равен 2, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен 30 градусов. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
Ответ: 12

4. В усеченном конусе радиусы оснований равны 5 и 2, а высота равна 4. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
Ответ: 35π

5. Основание АВС и грань ABD пирамиды DABC – правильные треугольники, угол между плоскостями которых равен 60 градусов. Найдите высоту пирамиды, если АВ=4.
Ответ: 3

6. Боковое ребро КВ пирамиды КАВС перпендикулярно плоскости основания и равно 8, угол АВС – прямой, АВ=10, АС=12,5. Найдите расстояние от вершины В до плоскости АСМ.
Ответ: 10

7. Основание пирамиды SABCD – квадрат ABCD со стороной, равной 15. Грани SDC и SBC перпендикулярны плоскости основания. Точка М делит ребро SA в отношении, считая от вершины А. Найдите расстояние от точки М до плоскости DMC.
Ответ: 6

8. Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм ABCD, в котором $CD = 2\sqrt{3}$, $\angle D = 60^\circ$. Тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью A_1BC равен 6. Найдите высоту параллелепипеда.
Ответ: 18

9. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб ABCD с углом 150 градусов и стороной, равной 2. Тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью ABC_1 равен 4,2. Найдите высоту призмы.
Ответ: 4,2

10. Концы отрезка МК лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой МК и плоскостью основания цилиндра равен 30 градусов, МК=8, площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π. Найдите периметр осевого сечения цилиндра.
Ответ: 28

11. В основании конуса проведена хорда. Через данную хорду и вершину конуса С проведена плоскость так, что угол при вершине С образовавшегося в сечении треугольника равен 60 градусов. Найдите расстояние от центра основания конуса О до данной плоскости, если высота конуса равна 2, а образующая равна $\frac{8}{3}$.

Ответ: 1

12. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны $2\sqrt{6}$. Найти расстояние между стороной основания и противолежащей боковой гранью пирамиды.
Ответ: 4

13. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна 200 кв. см. Боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60 градусов. Найдите сторону основания.
Ответ: 10

14. В конусе угол между образующей и плоскостью основания равен 15 градусов. Площадь боковой поверхности конуса равна $0,25\pi\sqrt{2}$. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие конуса, угол между которыми равен 45 градусов.
Ответ: 0,5

15. Вершины треугольника лежат на сфере радиуса 14. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если площадь треугольника равна 20, а произведение всех его сторон равно $320\sqrt{6}$.
Ответ: 10

16. Высота прямоугольного параллелепипеда в два раза больше ширины основания и в полтора раза больше его длины. Расстояние между серединами двух непараллельных ребер, принадлежащих разным основаниям, равно 13. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
Ответ: 336

17. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием 30 и высотой 36. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 45 градусов. Найдите объем пирамиды.
Ответ: 1800

18. Найдите площадь осевого сечения конуса, если известно, что высота конуса равна 4, а площадь его поверхности 24π.
Ответ: 12

19. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между плоскостями AB_1D_1 и BDC_1, если сторона куба $\sqrt{3}$.
Ответ: 4,8

20. SABC – правильная треугольная пирамида, K, L – середины ребер AB и AC соответственно. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SKL, если известно, что длина высоты SH пирамиды равна 1, а радиус описанной окружности треугольника ABC равен 3.
Ответ: 1,8

Обзор различных задач С1-С2.

1. Найдите точки максимума функции

$$f(x)=\left(7^{\sqrt{1-x}}-2\right)^2-49^{\sqrt{1-x}}+4\cdot x^2-0,5x^4+4\cdot 7^{\sqrt{1-x}}.$$

Указание: Следите за областью определения функции
Ответ: -2.

2. Найдите точки минимума функции

$$f(x)=\left(0,6^{\sqrt{0,5-x}}-2x\right)\left(0,6^{\sqrt{0,5-x}}+2x\right)+2\cdot x^4-0,36^{\sqrt{0,5-x}}.$$

Указание: Следите за областью определения функции
Ответ: -1.

3. Решите уравнение $x^2+x=0,5(6-x)+\sqrt{2x^2+3x+2}$

Ответ: 2; -3,5

4. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\frac{x+1}{x+4}-\frac{1}{3}x+\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2+x^2$.

Указание: Следите за областью определения функции

Ответ: $9\frac{1}{3}$

5. Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков $y=\log_{2+x}\left(2x^2+14x+19\right)$ и $y=1+\frac{1}{\log_5(2+x)}$.

Указание: Используйте свойство логарифма $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

Ответ: -1,5

6. Найдите значение функции $f(x)=5^{\log_5(x+4)-\log_{\frac{1}{5}}\frac{x^3-9x}{x+4}}$ в точке максимума.

Ответ: $6\sqrt{3}$

7. Решите уравнение $\sqrt{\sin^2 3x-6\sin 3x+9}-2\sin 1{,}5x\cos 1{,}5x=2$.

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$.

8. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=(0{,}5x-2)^4-18(0{,}5x-2)^2$ при $|x-5|\le 3$.

Ответ: -56

9. Найдите все значения *x*, при каждом из которых выражения $\frac{\sqrt{3}\cos^4\frac{x}{4}-\sqrt{3}\sin^4\frac{x}{4}}{tg^2\frac{x}{2}}$ и $\frac{\sin x}{tg^2\frac{x}{2}}$ принимают равные значения.

Ответ: $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

10. Найти наибольшее значение функции $f(x)=(2x-1)^5\cdot(-3x+1)$на промежутке $[1;+\infty)$.

Ответ: -2

11. Найти наименьшее значение функции $f(x)=(3x-2)^5\cdot(2x+1)$ на промежутке $[0;+\infty)$.

Ответ: -32

12. Решите уравнение $\sin x+\cos 8x\cos x=\sqrt{2}$.
Указание: Здесь удобно рассматривать cos8x как параметр.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

13. Решите уравнение $\sin x+\sqrt{3}\cos 12x\cos x=2$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

14. Решите уравнение $\frac{1}{\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)^2}=\frac{1}{4}\sin 3x$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

15. Решите уравнение $\cos^2\frac{\pi x^2}{1+x^2}=1$.

Ответ: 0

16. Решите уравнение $\sin^2\frac{\pi x^2}{1+x^2}=1$.

Ответ: -1; 1

17. Решите уравнение $\log_{\sin x}\left(\sqrt{3}\cos x+2\sin x\right)=1$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

18. Решите уравнение $\frac{ctgx\cdot\sin 2x-|\cos 2x|}{\sin 3x}=1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

19. Решите уравнение $tgx+2|tgx|+2\sin 2x=0$.

Ответ: $\pi n,\quad -\frac{\pi}{3}+\pi k,\ n,k\in Z$

20. Решите уравнение $\left(\left(2^{2x}-3\cdot 2^x+1\right)^2-4\left(2^x-3\right)\cdot 2^x-9\right)^2=\frac{|\cos x|}{\cos x}-1$

Ответ: 0, 1

21. Решите уравнение $\left(\log_2^3\left(x^2-4\right)-2\log_2^2\left(x^2-4\right)-3\log_2\left(x^2-4\right)\right)^2=\dfrac{\left|3+2x-x^2\right|}{x^2-2x-3}-1$

Ответ: $-\sqrt{5},\ -1{,}5\sqrt{2},\ \pm 2\sqrt{3}$.

22. При каких значениях x соответственные значения функций $f(x)=\log_3(x+1)$ и $g(x)=\log_3(1-x)$ будут отличаться меньше, чем на 2?

Ответ: $\left(-\dfrac{4}{5};\dfrac{4}{5}\right)$

23. Решите уравнение $(\sin x\cdot ctgx-1)^2-\cos^2 x=0$.

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

24. Найдите все значения x, для которых точки графика $y=\dfrac{\sqrt{10-2x}}{3x-8}$ лежат не ниже соответствующих точек графика функции $y=\dfrac{1-x}{3x-8}$.

Ответ: $(-\infty;-3]\cup\left(\dfrac{8}{3};5\right]$

25. Найдите все значения a, для которых число $\dfrac{\sqrt[3]{12a-5}}{|3a+13|+3a+13}$ не больше числа $\dfrac{12}{5-12a}$.

Ответ: $\left(-\dfrac{13}{3};\dfrac{5}{12}\right)$

26. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{9x^2-6y-31}{3x+2y+11}=-14x+8y+13\\ \sqrt{10-(2x-3y-9)^2}=\sqrt{10-(5x-y+2)^2}\end{cases}$$

Ответ: (-1; –3,5)

27. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-3y-23}{9x-3y-1}=10x+2y-13\\ \lg\left((7x-y-4)^2-1600\right)=\lg\left((2x-2y+3)^2-1600\right)\end{cases}$$

Ответ: (11; –2)

28. Решите уравнение $\ln^2\left(\frac{(x+3)\left(x^2-4x+4\right)}{3}\right)=\ln^2\left(\frac{x+3}{12}\right)$.

Ответ: 5; 6

29. Решите уравнение $\left(\sqrt{x+2}-4\right)\cdot x=x-14$.

Ответ: 7; 14

30. Найдите абсциссы всех точек графика функции $f(x)=\frac{x^3}{3}-5^{\log_5(6-x)}$, касательные в которых параллельны прямой $y=50x$ или совпадают с ней.

Ответ: -8

31. Найдите все значения x, при каждом из которых произведение значений выражений $\sqrt{3^{x+10}-27}$ и $4^{(x+5)^2-24}-4^{x^2+10x}-48$ отрицательно.

Ответ: $\left[-7;\,3\sqrt{3}\right)$

32. Решите систему:

$$\begin{cases}\sqrt{1-2\sin^4\frac{y}{2}-2\cos^4\frac{y}{2}+x^2-8\pi x+16\pi^2}=0\\ \pi<\log_2 3\cdot\log_3 2^{x+y}<2\pi\end{cases}$$

Ответ: $-\frac{5\pi}{2}$

Обзор заданий С3, С5Обзор заданий С3, С5

Лекция 1. Композиция функций

1. Решите уравнение $f(f(x))=f\left(x^2+4x+9\right)$, если

$$f(t)=\begin{cases}25-4t+5|t-5|,\ при\ t>0\\ 6t-5t^2+3t^3,\ при\ t\le 0\end{cases}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{333}-13}{2}$

2. Решите уравнение $f\left(f(-x^2)\right)=f\left(x^2\right)$, если

$$f(t)=\begin{cases}|t|,\ при\ t\ge -1\\ 8-8(t+1)^{-1},\ при\ t<-1\end{cases}$$

Ответ: $[-1;\,1]\cup\{\pm 3\}$

3. Решите уравнение $x^{12}-(12+8x)^6=32\sin|12+8x|-32\sin\left(x^2\right)$.

Ответ: $\left\{-6;\,-2;\,-4\pm 2\sqrt{7}\right\}$

4. Решите уравнение $f(g(x))+g(1+f(x))=33$, если известно, что

$f(x)=x^2-6x+15$ и $g(x)=\begin{cases} 18, при\ x\ge 4 \\ 3^x+\dfrac{12}{5-x}, при\ x<4 \end{cases}$.

__Указание:__ Найдите точку минимума функции *f(x)*. Исходя из этого вычислите значение g(x) в точках, которые могут быть решениями уравнения. Далее решите графическим методом.

__Ответ:__ 1.

5. Решите уравнение $f(g(x))+g(f(x))=32$, если известно,

что $f(x)=0{,}5x^2-2x+12$ и $g(x)=\begin{cases} 20, при\ x\ge 5 \\ 0{,}5\cdot 2^x+\dfrac{8}{6-x}, при\ x<5 \end{cases}$.

__Ответ:__ 2

6. Решите уравнение $f(g(x))+g(2+f(x))=15$, если известно, что $f(x)=x^4-4x+5$ и

$g(x)=\begin{cases} 10, при\ x\ge 3 \\ 4^{x+1}+2^x, при\ x<3 \end{cases}$.

__Ответ:__ $\log_2\dfrac{\sqrt{1+16\sqrt[3]{4}}-1}{8}$.

7. Решите уравнение $f(g(x))+g\left(f(x)-\sqrt{11}\right)=0$, если известно,

что $f(x)=2\cos x+\cos 2x$ и $g(x)=\begin{cases} \dfrac{2\pi x}{x^2+1}, при\ x\ge 0 \\ -3, при\ x<0 \end{cases}$.

__Ответ:__ 0.

8. Решите уравнение $f(g(x))+g(5+f(x))=12$, если известно,

что $f(x)=x^4-3x+3$ и $g(x)=\begin{cases} 9, при\ x\ge 3 \\ \cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right), при\ x<3 \end{cases}$.

__Ответ:__ $\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{\pi n}{3}, n\le 2$.

9. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$ верны условия $a_{n+1}=f(a_n), a_n>0, n=1,\ldots,39$ и

$a_{40}=1$. Найдите $a_5+a_8+a_{11}$, если $f(x)=\begin{cases} 2x-1, при\ x<3 \\ 3\cos x-2, при\ x\ge 3 \end{cases}$.

__Ответ:__ 3.

10. Для чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n),\ n = 1, \ldots, 98$ и $a_{99} = 0$.

Найдите $a_{33} + a_{40}$, если $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+8}{x-2},\ при\ x < 2 \\ \sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x-1}} + \sqrt{\dfrac{8x-7}{2x+3}},\ при\ x \ge 2 \end{cases}$.

Ответ: -4.

11. Решите уравнение $f(g(x)) + g(10 + f(x)) = 11$, если известно,

что $f(x) = x^4 - 6x + 2$ и $g(x) = \begin{cases} 9,\ при\ x \ge -4 \\ \sin x + \cos x,\ при\ x < -4 \end{cases}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \le 1.$

12. Решите уравнение $f(g(x)) + g(f(x)) = 54$, если известно,

что $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 6$ и $g(x) = 3 - \sqrt{x^4 - 2x^3 - 6x - 9}$.

Ответ: -1

10. Решите уравнение $f(g(x)) + g(3 + f(x)) = 20$, если известно,

что $f(x) = x^4 - 8x + 10$ и $g(x) = \begin{cases} 10,\ при\ x \ge 4 \\ \ln|x|,\ при\ x < 4 \end{cases}$.

Ответ: $\{\pm 1;\ \pm e^2\}$

Лекция 2. Комбинированные неравенства (задания С3 по вариантам ЕГЭ 2009 года)

1. Найдите все значения *x*, большие 1, при которых наибольшее из чисел

$0{,}5\log_4^2 x^2 - \log_4 x - 6$ и $5 + \log_x 0{,}2 - 2\log_x^2 (0{,}2x^2)$ неотрицательно.

Ответ: $\left[\sqrt[3]{5};\ +\infty\right)$

Указание: Оценить каждое выражение отдельно, разложив на множители.

2. Найдите все значения *a*, большие 1, при которых наибольшее из чисел

$b = \log_5^2 a - \log_5 (125a^7) + 16$ и $c = \log_a^2 5 + \log_a (625a^3) - 8$ не больше 7.

Ответ: $\left[5;\ 5^6\right]$

3. Найдите все значения $x > 1$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел

$a = \log_2 x + 2\log_x 32 - 2$ и $b = 41 - \log_2^2 x^2$ больше 5.

Ответ: $1 < x < 8,\ x > 32$

4. Найдите все значения *а*, при каждом из которых наименьшее из двух чисел $p=\log_3^2 a-3\log_3\left(9a^3\right)-6$ и $q=4-\log_a^2 3-3\log_a(3a)+1$ не меньше, чем –2.

Ответ: $\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup\left[3^{10};+\infty\right)$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых хотя бы одно значение функции $y=3^{a-2x^2}-8$ принадлежит промежутку $\left(4-3^{3-a};19\right)$

Ответ: $a<3$

6. Найдите все значения $a>1$, при каждом из которых все значения функции $y=\dfrac{4}{\log_2\left(a+|x|\right)}$ принадлежат промежутку $\left[-5;\log_2 a-3\right)$.

Ответ: $a>16$

7.

Лекция 3 (обзор заданий С3 прошлых лет)

1. Найдите все значения *а*, для которых при каждом *х* из промежутка $[-3;-1)$ значение выражения x^4-7x^2-3 **не равно** значению выражения ax^2.

Ответ: $(-\infty;-9]\cup\left(1\frac{2}{3};+\infty\right)$

2. Найдите все значения *а*, для которых при каждом х из промежутка $[-2;-1)$ значение выражения x^4-2x^2 **не равно** значению выражения ax^2+5.

Ответ: $(-\infty;-6]\cup(0{,}75;+\infty)$

3. Найдите все значения параметра *а*, при которых неравенство

$$\frac{a+0{,}5\cos\sqrt{x-20}-0{,}5}{x-4-(a-3)\sqrt{x-4}-3a}\le 0$$ не имеет решений.

Ответ: $(1;4]$

4. Найдите все значения параметра *а*, при которых неравенство

$$\frac{4^x+2^{\frac{3-4x}{2}}+3-a}{4arctg\sqrt{x}+a-5}\ge 0$$ не имеет решений.

Ответ: $(-\infty;5-2\pi]$

5. Найдите все значения *х*, для каждого из которых неравенство $(2-x)a^2+\left(x^2-2x+3\right)a-3x\ge 0$ выполняется для любого значения а, принадлежащего промежутку $[-3;0]$.

Ответ: -1

6. Найти все значения *a*, для каждого из которых неравенство

$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\dfrac{\sin x-\sqrt{3}\cos x+a-4}{5}\right)>0$ выполняется для любого значения x.

<u>Ответ:</u> $(11;+\infty)$

7. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\left|x^2+ax-4\right|\le 8$ верно для любого значения переменной $x\in[-6;-2]$.

<u>Ответ:</u> 4

8. Найдите все значения *x*, которые удовлетворяют неравенству

$\log_3^2 x\cdot(a-2)-\log_3 x^2\cdot(a+1)<7a-36$ при любом значении параметра *a*, принадлежащем промежутку $(3;4)$.

<u>Ответ:</u> $[27;81]$

9. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство

$\left|\cos 2x+\dfrac{1}{2}(a-4)\cos x-\left(\dfrac{1}{2}a-1\right)\right|\le 1$ верно при всех значениях *x*.

<u>Ответ:</u> 4.

10. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $\left|ax+3|x|-5\right|\le 1$ при всех значениях $a\in[1;3]$.

<u>Ответ:</u> 1

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$\left(\dfrac{6}{5}\cos 20^\circ\right)^{x^2+ax-12}\le 1$ верно для любого значения переменной $x\in[-6;2]$.

<u>Ответ:</u> 4

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$ имеет хотя бы один корень, причем каждый из них принадлежит отрезку $[2;17]$.

<u>Ответ:</u> $[1;3]$

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых значение выражения

$(x-2)(x^2-2x+6)$ **<u>не равно</u>** значению выражения $a\left(x+\dfrac{6}{x}-2\right)$ ни при одном значении переменной $x\in(1;3]$.

<u>Ответ:</u> $(-\infty;-1]\cup(3;+\infty)$

<u>Лекция 4. Обзор различных заданий части 3</u>

1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство $\log_{\sqrt{11}-\sqrt[3]{12}}\left(\log_6\left(\left|\frac{1}{2}x^2+ax-2\right|+2\right)\right)\le 0$ верно при всех значениях переменной *x*, принадлежащей отрезку $[-6;\,2]$.

Ответ: 2

2. Найти сумму всех целых значений *x*, являющихся решениями системы:

$$\begin{cases}\log_{\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}}\left|2x^2+2ax-7\right|\ge\log_{\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}}9\\ a=2x^2\end{cases}$$

Ответ: 0.

3. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $(10a-29)\cdot 27^x+(11-3a)\cdot 9^x-(7a-17)\cdot 3^x+1=0$ имеет $\frac{5-a+3|a-1|}{4}$ корней. Решите уравнение при этих *a*.

Ответ: a=1; x=0 и a=3; $x_1=0,\ x_2=\log_3\left(\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)$.

Указание: Перейдите к решению кубического уравнения. Обратите внимание, что *x=0* является решением уравнения при любых *a*. Выясните при каких а уравнение может иметь 1,2,3 корня. Обратите внимание, что в данном уравнении подойдут только положительные корни кубического уравнения.

4. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $(4+a)\cdot 3^x-(11+3a)\cdot 3^{0,5x}+2a+7=0$ имеет $a^2+8a+17=0$ корней. Решите уравнение при этих *a*.

Ответ: a=-4; x=0 и a=-5; $x_1=0,\ x_2=2$.

5. Семь чисел образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью *d*. Первый, второй и шестой члены этой прогрессии являются решениями неравенства $\log_{4-x-|x|}(16-x)\le 2$, а остальные не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений разности этой прогрессии.

Указание. Решите неравенство. Обратите внимание, что в его решении обязательно должна быть выколотая точка. Тогда шестой член последовательности равен этому *x*. Далее опишите системой неравенств остальные члены прогрессии и решите систему неравенств.

Ответ: $-\frac{2}{5}<d<-\frac{3}{8}$.

6. Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $(x-1)(\log_3 x-1)\cdot 2^{x-3}\cdot e^{x^2}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

Ответ: $(-1;\,1)$

7. Известно, что второй и третий члены возрастающей арифметической прогрессии являются решениями неравенства $(x-4)(\log_2 x-4)\cdot 2^{x+7}\cdot e^{-\frac{x}{2}-2}<0$, а остальные члены не являются. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

Ответ: $(-8;4)$

8. Пусть А – множество значений параметра *a*, для которых выполнено условие $x_1^2+x_2^2\le 16$, где x_1 , x_2 - действительные, различные корни уравнения $x^2-2ax+2-a=0$. Найдите множество значений, которое при этих условиях принимает величина $x_1^3+x_2^3$.

Указание: Используйте теорему Виета. Для нахождения ответа можно использовать график функции y(a).

Ответ: $[-57{,}5;-16)\cup(2;64]$.

9. Найдите те значения параметра *a*, при которых число целых решений неравенства $\left||x-2|-2x\right|\le a(x+4)$ не менее 1 и не более 4.

Ответ: $\left[\frac{1}{5};\frac{3}{4}\right)$.

10. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнения $\left|x^2-4x\right|=a+3$ и $\frac{x}{5-|x-1|}=ax^2$ имеют корни, причем число корней в этих уравнениях одинаковое.

Ответ: $(-3;-0{,}25)\cup\left(\frac{1}{9};1\right)$.

11. Найдите все значения параметра *a*, при котором каждое из уравнений
$\frac{x^4-2x^2-2(3-a)x+a^2-11a+24}{x^2-a}=x^2+a-3$ и $6\sin\left(\frac{\pi}{x+1}\right)=\left(4+\sqrt{a-3}\right)x-17$
имеет хотя бы одно решение, и при этом число решений одного из этих уравнений отличается от числа решений другого на неотрицательное целое число *a-3*. Решите при этих *a* второе уравнение.

Указание: Преобразуйте первое уравнение, найдите множество подходящих целых a, больших 3. Графически решите второе уравнение.
Ответ: a=3, x=5

12. Найдите все значения параметра *a*, при котором каждое из уравнений
$a^2+4a+5-3x+\frac{\sqrt{a+2}}{x^2}=0$ и $x+\frac{2}{x}+\frac{x+3a+9}{a+2}=0$ имеет хотя бы одно решение, и при этом произведение числа корней одного из этих уравнений на число корней другого равно $\frac{2}{3}\cdot\log_2(7-a)$. Решите при этих а первое уравнение.
Ответ: *a*=-1, *x*=1

13. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\left|x^2+4x\right|=a+9$ и $\frac{1}{8-|x-3|}=ax$ имеют равное число корней.

<u>Ответ:</u> $\{-5\}\cup\left\{-\frac{4}{25}\right\}\cup\left\{\frac{4}{121}\right\}$.

14. Найдите все значения параметра а, при которых количество корней уравнения $(a-5)x^3-2x^2+x=0$ равно количеству общих точек линий $x^2+y^2=a^2$ и $y=6-|x-2|$.

<u>Ответ:</u> $\{-2\sqrt{10}\}\cup\{-4\sqrt{2}\}\cup\{5\}\cup\{4\sqrt{2}\}$.

15. Решите систему $\begin{cases}\lg x-\frac{1}{2}\log_{0,1}y\geq\sqrt{\frac{4\lg^2 x+\lg^2 y}{2}}\\ 5x-y=4\end{cases}$.

<u>Ответ:</u> (1;1), (4;16).

16. Решите систему $\begin{cases}\sqrt{\log_2 x\cdot\log_{\frac{1}{3}}y}\geq\log_2 x-\log_3 y\\ x=2y-1\end{cases}$

<u>Ответ:</u> (1;1)

17. Решите неравенство $\left(2+2x^2-x^4\right)\cdot\log_2\left(\sin^2\frac{\pi x}{x^2+1}+1\right)\geq 3$.

<u>Ответ:</u> $\{-1;1\}$

Указание: Оцените второй множитель.

18. Решите уравнение $\left|\left|\frac{14x-7}{(x+3)(x-4)}\right|-\left|\frac{x-4}{x+3}\right|\right|=\left|\frac{x+3}{x-4}\right|$.

<u>Ответ:</u> $(-\infty;-3)\cup\left(-3;\ \frac{1}{2}\right]$

19. Решите неравенство

$$\left(x^2+2\right)\left(\sqrt{\left(x^2+2\right)^2+7}+1\right)-3x\left(\sqrt{9x^2+7}+1\right)\leq 0$$

<u>Ответ:</u> $[1;2]$

20. Найдите все значения p, при каждом из которых число различных корней уравнения $\frac{(4-2p)x-1-4p}{x+2}=p^2+4$ меньше числа различных корней уравнения

$$(p+2)x^2+(6p+4)x+2=0$$

Ответ: $\left(-\infty; -\dfrac{10}{9}\right) \cup (0; +\infty)$

Лекция 5

1. Найдите все значения а, при каждом из которых оба числа $4\sin a - 3$ и $8\cos 2a + 16\sin a + 1$ являются решениями неравенства

$$\frac{\left(21x - 2x^2 + 65\right)\sqrt{x+2}}{\log_3|x-9| - 2} \geq 0 .$$

Ответ: $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

Указание: Обратите внимание, что если первое число обозначить за *t*, то второе число запишется квадратичной функцией от *t*. Построим график квадратичной функции, найдем такие *t, y(t)*, что они принадлежат множеству решений неравенства.

2. Найдите все значения а, при каждом из которых оба числа $a\sqrt{3a-11} - 5$ и $11a^2 + 20a\sqrt{3a-11} - 3a^3 - 93$ являются решениями неравенства

$$\log_{0,5x-2}\left(\log_4 \frac{12}{\sqrt{3x-12}}\right) \leq 0 .$$

Ответ: 5

3. Найдите все значения а, при каждом из которых оба числа $a\sqrt{a-2} - 5$ и $2a^2 + 24a\sqrt{a-2} - a^3 - 131$ являются решениями неравенства

$$\log_{2x-12}\left(\log_5\left(2x^2 - 41x + 200\right)\right) \geq 0 .$$

Ответ: 6

4. Найдите все значения а, при каждом из которых оба числа $a \cdot 2^{a-4}$ и $a^2 \cdot 4^{a-4} + 104 - 5a \cdot 2^{a-2}$ являются решениями неравенства $\log_{10,5-x}\left(\log_2\left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)\right) \geq 0$.

Ответ: 5

5. Найдите все значения а, при каждом из которых оба числа $a \cdot 2^{a-2}$ и $-4a^2 \cdot 4^{a-3} + 104 + 3a \cdot 2^a - 27$ являются решениями неравенства

$$\log_{x-5,5}\left(\log_4\left(\frac{x-13}{x-10}\right)\right) \geq 0 .$$

Ответ: 3

6. Найдите все значения а, при каждом из которых оба числа $4\cos a + 4$ и $8\cos 2a - 32\cos a + 23$ являются решениями неравенства

$$\frac{1 - \log_5|x-4|}{\left(114 - x - 3x^2\right)\sqrt{x+3}} \leq 0 .$$

Ответ: $2\pi n,\ n \in Z$

Лекция 6

1. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 9x^3+18x^2+17x+20=0 \\ 2+(3x+10)^{y-1}\left(y+2+\dfrac{5}{x}\right)=y+11^{x-2y}\cdot\sqrt{9x^2(x+4)+3(x+7)^2+13x-122} \end{cases}$$

не имеет решений.

Указание: Обратите внимание на *x*, при которых подкоренное выражение во втором уравнении равно 0. Проверьте, являются ли такие *x* корнями первого уравнения.

2. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 3x^3+13x^2+20x+14=0 \\ (6x+17)^y-5=\dfrac{7y}{x}+2^{x+y}\cdot\sqrt{9x(x+3)^2-3x^2+10x+49} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

3. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 8x^3+18x^2+15x+14=0 \\ (10+4x)^y-2=y\left(5+\dfrac{7}{x}\right)+7^{x+y}\cdot\sqrt{16x(x+1)^2+40x^2+89x+49} \end{cases}$$

имеет хотя бы два различных решения.

4. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 16x^3+40x^2+29x+6=0 \\ \log_{13+4x}\left(5y+10+\dfrac{3}{x}\right)-7=y(5+12x)+\log_7 y\cdot\sqrt{\dfrac{9}{x}-8x(2x+1)+15} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. Найдите все корни уравнения $6x^3+28x^2+39x+15=0$, при подстановке каждого из которых в уравнение

$$5\log_{10+3x}\left(y+8+\frac{5}{x}\right)-3=\frac{y(13+6x)}{4}+\sqrt{\frac{25}{x}-3x(7+3x)+5}\cdot\ln(y+5)$$ получится

уравнение относительно y, имеющее более одного корня.

<u>**Ответ:**</u> $-\dfrac{5}{3}$

Лекция 7

1. Найдите количество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} y(1-x)^3+x^2=0, \\ x-\dfrac{6}{x\cdot\log_y 5}=3\log_{125}\left(0{,}2y^2\right)-2 \end{cases}$$

<u>**Ответ:**</u> 1

<u>**Указание:**</u> решите второе уравнение как квадратное. Не забывайте о проверке ОДЗ,

2. Найдите количество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} (x-1)^3 - x^2 y = 0, \\ x - \dfrac{5}{x \cdot \log_y 3} = 2\log_{81}\dfrac{81}{y^2} + 3 \end{cases}$$

Ответ: 2

3. Найдите количество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{y-x} + \sqrt{2x+y} = 3x \\ 3x^2 - 2xy - y^2 + x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

Ответ: 2

4. Найдите количество решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 = 0, \\ y^2 - \left(tgx + \sqrt{8-x^2}\right)y + tgx \cdot \sqrt{8-x^2} = 0 \end{cases}$$

Ответ: 5

Лекция 8

1. Решите систему $\begin{cases} \sqrt{x^2 + (y-4)^2} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left|x - 2y - 2\right| = 2\sqrt{5} \\ x \geq 2 \end{cases}$

Ответ: (2;0)

Указание: Обратите внимание, что в первом уравнении речь идет о точке, сумма расстояния от которой до 0 и длины перпендикуляра, опущенного из точки на прямую $x - 2y - 2$, равна $2\sqrt{5}$. Найдите такие точки.

2. Решите систему

$$\begin{cases} |y-2x| + \left|\dfrac{|x-2|}{x-2} - 1\right| = 0 \\ \sqrt{x^2 + (y-10)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} \leq 10 \end{cases}$$

Ответ: (3;6)

Указание: второму неравенству удовлетворяют точки, сумма расстояний от которых до точки (0; 10) и до точки (6; 2) меньше 10. Определите где лежат все точки, удовлетворяющие этому условию.

3. Решите систему $\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} + 0{,}2\left|4y - 3x + 12\right| = 5 \\ x^2 + (y+3)^2 \leq 25 \end{cases}$

Ответ: (4;0)

4. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} \geq 2\sqrt{5} \\ \sqrt{x^2 + (y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} \leq 2\sqrt{13} \end{cases}$$

Ответ: (3;6)

5. Решите систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}\ge 5 \\ |y-x-2|+|(x-4)(x-8)|+(x-4)(x-8)=0 \end{cases}$$

Ответ: (6;8)

6. Найдите наибольшее значение y, для которого существуют значения x и z, удовлетворяющие условиям: $\begin{cases} yz+x\sqrt{1-z^2}=1 \\ \sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{(x-0{,}6)^2+(y+0{,}8)^2}+1 \end{cases}$

Ответ: -0,8

7. Найдите наименьшее значение x, для которого существуют значения y и z, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} yz+x\sqrt{1-z^2}=1 \\ \sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{(x-0{,}6)^2+(y-0{,}8)^2}+1 \end{cases}$$

Ответ: 0,6

Указание: В первом неравенстве нужно использовать свойства производной.

8. Найдите целое x, при котором значение выражения

$\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}\cdot\dfrac{(x-2)\left(x+2-\sqrt{(x-5)(x+2)}\right)}{(x+5)\left(x-5-\sqrt{(x-5)(x+2)}\right)}$ максимально близко к числу – 0,7

Указание: В числителе и знаменателе дроби вынесите общий множитель. Введите новую переменную $t=\sqrt{\dfrac{x-5}{x+2}}$, упростите выражение.

Ответ: 18

9. Найдите все значения параметра a, при которых в области определения функции

$y=\log_{16+a}\left(\ln\dfrac{a-17x}{5x+a}\right)$ содержится отрезок длины 2, состоящий из положительных чисел.

Указание: Найдите область определения функции. Проверьте на прямой, что неравенство $\dfrac{x}{x+\frac{a}{5}}<0$ включает нужный отрезок при $-\dfrac{a}{5}>2$. Пересеките полученные условия на параметр a.

Ответ: $(-16;-15)\cup(-15;-10)$

10. Найдите все значения параметра a, при которых в области определения функции

$y=\log_{19+a}\left(\ln\dfrac{11x+a}{a-2x}\right)$ содержится отрезок длины 6, состоящий из отрицательных чисел.

Ответ: $(-19;-18)\cup(-18;-12)$

11. Найдите все натуральные значения параметра *n*, при которых отрезок длины *n* является областью определения функции $y=\sqrt[2n]{(2n-x)^{2n+1}(4x-5n+6)^{2n+7}}$.

Ответ: 6

12. Найдите максимальной значение объема прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, если известно, что площадь полной поверхности этого параллелепипеда равна 6 квадратных сантиметров.

Ответ: 1 куб. см.

13. Найдите все положительные числа а, при которых область определения функции $y=\left(a^{x+5}+a^{4+5\log_a x}-x^{5+x\log_x a}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^{27}\right)^{0,5}$ содержится в некотором отрезке длины 2.

Ответ: $[2;6]$

14. Даны два числа: $p=a^3\left(a-\frac{5}{a}\right)+1$ и $q=a^{-3}\left(4a-\frac{1}{a}\right)+2$. При каких $a<0$ каждое из них не меньше –3?

Ответ: $(-\infty;-2]\cup\left[-1;-\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

Стереометрия группы С (задание С4).

1. Отрезок АВ – диаметр сферы. Точки С и D лежат на сфере так, что объем пирамиды ABCD наибольший. Найдите этот объем, если радиус сферы равен 2.

Указание: Сделать максимальной по отдельности площадь основания и высоту.

Ответ: $\frac{8}{3}$ куб. см.

2. Внутри правильного тетраэдра ABCD с ребром, равным 12, расположен конус, вершина которого является серединой ребра CD. Основание конуса вписано в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра ВС параллельно прямым CD и АВ. Найдите объем конуса.

Указание: Доказать, что в сечении получается квадрат, найти его сторону. Далее рассмотреть треугольник BLA, где L – середина DC. Высота этого треугольника, проведённая из L, равна удвоенной высоте конуса.

Ответ: $9\pi\sqrt{2}$

3. Ребра АВ и AD основания ABCD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 9 и 4. На боковых ребрах AA_1 и BB_1, равных 11, лежат точки М и Р соответственно так, что $AM : MA_1 = 3 : 4$, $BP_1 : PB = 8 : 3$. Найдите объем пирамиды с вершиной в точке Р, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1.

Указание: Сечение является 4-угольником. Разбить пирамиду на две пирамиды с треугольными основаниями, и найти по отдельности объем каждой из них.

Ответ: 36

4. Отрезок PN, равный 8, - диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды PNML наибольший. Найдите площадь треугольника KLT, где K и T - середины ребер PM и NM соответственно.

Указание: см. задачу 1. Далее пусть Н – середина КТ. Тогда $S = 0{,}5 \cdot KT \cdot LH$.

Ответ: $4\sqrt{5}$.

5. В пирамиде FABC грани ABF и ABC перпендикулярны, FB:FA=15:11. Тангенс угла между прямой ВС и плоскостью ABF равен 5. Точка М выбрана на ребре ВС так, что BM:MC=4:11. Точка Т лежит на прямой AF и равноудалена от точек М и В. Центр сферы, описанной около пирамиды FABC, лежит на ребре АВ, площадь этой сферы равна 36π. Найдите объем пирамиды АСМТ.

Указание: доказать, что треугольники АВС и ABF прямоугольные. Пусть D – середина ВМ, Н – точка на АВ, такая что HD перпендикулярно ВМ. Доказать, что ТН перпендикулярно АВ. После этого вычислить все отрезки АС, ВС, ВМ, МС, ВН, АН, ТН.

Ответ: 6

6. Около правильной пирамиды FABC описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания АВС пирамиды. Точка М лежит на ребре АВ так, что AM:MB=2:7. Точка Т лежит на прямой AF и равноудалена от точек М и В. Объем пирамиды TBCM равен $\frac{154\sqrt{3}}{81}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды FABC.

Указание: найти отношение объёмов пирамид TMBC и FABC.

Ответ: 2

7. Основанием пирамиды FABCD является прямоугольник ABCD. Плоскость AFC перпендикулярна плоскости ABC, тангенс угла FAC равен $\frac{16}{7}$, тангенс угла между прямой BC и плоскостью AFC равен 3. Точка M лежит на ребре BC, $BM = \frac{2}{5}BC$. Точка L лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и C. Объем пирамиды LAMCравен 48. Центр сферы, описанной около пирамиды FABCD, лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите радиус этой сферы.

Указание: Опустить высоту LH на основание. Точка H попадёт на отрезок AC. Далее провести HK перпендикулярно к MC. Точка K окажется серединой MC. Обозначив LH=h, выразить AH, HC, BC, AB через h. Далее, зная объём, найти h.
Ответ: 5

8. В треугольной пирамиде ABCD перпендикулярны скрещивающиеся ребра AD и BC. Все ребра пирамиды касаются некоторого шара. Найдите максимально возможный радиус этого шара, если AB=CD=$3\sqrt{2}$.

Указание: опустить высоты из точек B,C на отрезок AD. Доказать, что основания высот попадают в одну точку. Далее рассмотреть окружности, вписанные в треугольники ABD, ACD. Доказать, что их точки касания с отрезком AD совпадают. Отсюда доказать равенство треугольников ABD, ACD.

Ответ: 1,5

9. Дана правильная четырехугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 10. Сфера, центр которой лежит на AA_1 касается основания ABCD, бокового ребра CC_1 и проходит через середину ребра B_1C_1. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Указание: Пусть O – центр сферы, M – середина B_1C_1, R – радиус сферы. Тогда OA = R = AC, и $R^2 = OM^2 = OA_1^2 + A_1B_1^2 + B_1M^2$ отсюда найти OA_1.
Ответ: $200 \cdot \left(\sqrt{8} + \sqrt{3}\right)$.

10. Основанием пирамиды FABC является треугольник ABC, в котором угол ACB равен 90 градусов, AC=2, BC=3. Ребро AF перпендикулярно плоскости ABC и равно 4. Отрезки AM и AL являются соответственно высотами треугольников AFB и AFC. Найдите объем пирамиды AMLB.

Указание: В начале найти объём FABC. Затем опустить высоту из L на плоскость AFB, и найти отношение $\frac{V_{AMLB}}{V_{FABC}}$. Использовать теорему об отношении площадей, и соотношения в прямоугольном треугольнике.

Ответ: $\frac{208}{145}$

11. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD с вершиной S высота равна диагонали основания. Точка F лежит на ребре SC, причем SF:FC=1:4. Найдите квадрат котангенса угла между прямой BF и плоскостью ACF.

Указание: Опустить высоту SO на основание. Тогда треугольник BOF – прямоугольный. Обозначить BO = a, и выразить FO через a, используя теорему косинусов в треугольнике FSO.

Ответ: 2,6

12. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно $4\sqrt{3}$, точка K – середина ребра CC_1. Найдите радиус сферы, проходящей через точки B_1, K, B, A_1.

Указание: Указание: пусть O – центр сферы. Опустить – перпендикуляр OP на плоскость BKB_1 и перпендикуляр OQ на плоскость BAB_1. Тогда точки P, Q – центры окружностей, описанных около треугольников BKB_1,BAB_1. Рассматривая эти треугольники, найти PL и QL, где L – середина отрезка BB_1. Далее перейти в плоскость OPLQ.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{123}}{2}$

13. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC, в котором $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 2\sqrt{6}$. Точка K – середина ребра CC_1, а тангенс угла между прямой A_1B и плоскостью основания равен $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Найдите расстояние между прямыми B_1K и A_1B.

Указание: использовать формулу для вычисления объёма треугольной пирамиды: $V = \dfrac{1}{6}abd$, где a,b – скрещивающиеся рёбра, d – расстояние между ними. Вычислить объём пирамиды A_1B_1BK двумя способами: с помощью этой формулы, и обычным способом. Приравняв эти объёмы, найти d.

Ответ: 4

14. Сфера радиуса 1 касается некоторой плоскости в точке A. AB – диаметр сферы. В этой плоскости лежит основание конуса, который касается сферы в точке D. O – центр основания конуса. Известно, что точки O, D, и B лежат на одной прямой и $\angle OBA = 30^\circ$. Чему равна высота конуса?

Указание: задача полностью сводится к планиметрической в плоскости ABO.

Ответ: 1

15. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 60 градусов. В конус вписана четырехугольная пирамида так, что ее основание вписано в основание конуса, вершина лежит на боковой поверхности конуса, а объем пирамиды максимально возможный. Найдите длину образующей конуса, если объем указанной пирамиды равен $18\sqrt{3}$.

Указание: докажите, что объём максимальный, если в основании квадрат, а вершина совпадает с вершиной конуса. См. также указание к задаче 1.

Ответ: 6

Таблица пересчета первичных баллов прошлых лет

	2009 г.	2008 г.			2007 г.	
Первичный балл	Серт. балл	Серт. балл	Школьный балл	Балл для ВУЗов	Сертиф. балл	Школьный балл
0	0	0	2	2	0	2
1	7	6	2	2	12	2
2	13	12	2	2	20	2
3	17	17	2	2	24	2
4	21	20	2	2	27	2
5	24	23	2	2	30	2
6	27	25	3	3	33	3
7	30	28	3	3	36	3
8	32	31	3	3	38	3
9	35	33	3	3	41	3
10	38	36	3	3	44	3
11	41	39	3	3	47	3
12	44	41	3	3	49	3
13	47	44	4	3	52	4
14	50	47	4	4	55	4
15	52	50	4	4	58	4
16	55	53	4	4	61	4
17	57	56	4	4	64	4
18	60	58	4	4	67	4
19	62	60	4	4	68	5
20	64	63	5	4	72	5
21	66	65	5	5	74	5
22	68	68	5	5	76	5
23	70	70	5	5	78	5
24	73	73	5	5	80	5
25	74	75	5	5	82	5
26	76	77	5	5	83	5
27	77	78	5	5	85	5
28	78	80	5	5	86	5
29	79	81	5	5	87	5
30	80	82	5	5	88	5
31	81	83	--	5	89	5
32	82	84	--	5	90	5
33	83	86	--	5	92	5
34	84	88	--	5	94	5
35	86	91	--	5	96	5
36	90	94	--	5	98	5
37	100	100	--	5	100	5

Благодарности, список литературы

2008 г.: Выражаю благодарность **Анне Георгиевне Малковой** за организацию интенсива, соведущим интенсива **Георгию Мутафяну** и **Илье Поливанову** за активное сотрудничество и моей семье за моральную поддержку.
2009 г.: С огромной благодарностью **Дане и Александру Новичковым**, моим соведущим и единомышленникам. Моей дочке **Лерке** за то, что она есть.
2010 г.: Дане и **Александру Новичковым** - соратникам и друзьям. **Илье Марковичу Ланцману**, финансовому директору проекта, человеку, умеющему решать любые проблемы.

Список литературы:

1. ФИПИ. Реальные задания. ЕГЭ-2008. АСТ. Астрель. Составители: Кочагин и др., 2008
2. «Самое полное издание реальных изданий ЕГЭ 2008. ФИПИ.» АСТ. Астрель. Составитель: Кочагин и др., 2008

3. «ЕГЭ 2007 Тренировочные задания.» Просвещение ЭКСМО. Корешкова Т.А., Мирошин В.В. и др., 2007
4. «Самое полное издание реальных изданий ЕГЭ 2008. ФИПИ.» АСТ. Астрель. Составитель: Кочагин и др.
5. «ЕГЭ 2007. Математика. Новее не бывает». Сергиев Посад: Фолио, 2007
6. «Единственные реальные варианты для подготовки к ЕГЭ. ЕГЭ-2006. Математика». А.Г. Клово. Москва, ФЦТ, 2006.
7. Л.Д.Лаппо, М.А.Попов «Математика. Практикум», Москва. Издательство «Экзамен», 2008.
8. Т.А. Корешкова, Ю.А.Глазков и др. «Математика. Типовые тестовые задания». Москва. Издательство «Экзамен», 2008.
9. «ЕГЭ 2006-2007 Тренировочные задания.» Просвещение ЭКСМО. Корешкова Т.А., Мирошин В.В. и др., 2006
10. ФИПИ. Математика: реальные варианты: ЕГЭ2007-2008/авт-сост. В.В. Кочагин, Е.М. Бойченко и др.» Москва. АСТ:Астрель, 2008.
11. Под редакцией Лысенко «Математика ЕГЭ 2007. Учебно-тренировочные тесты». Ростов-на-Дону: Легион, 2007.
12. Л.Д.Лаппо, М.А.Попов «Математика. Практикум», Москва. Издательство «Экзамен», 2007.
13. ЕГЭ-2008. Математика. Тренировочный персональный комплект экзаменационных материалов. Автор-составитель: Денищева Лариса Олеговна. Центр образования «Уникум», 2008.
14. А.Г. Клово, Д.А. Мальцев «Математика. Сборник тестов по плану ЕГЭ 2008», Афина, Москва, 2008 г.
15. ФИПИ. «Единый государственный экзамен 2009. Математика», авторы-составители: Денищева Л.О., Глазков Ю.А. и др., Интеллект-Центр, 2009.
16. ФИПИ «Самое полное издание типовых вариантов реальных вариантов ЕГЭ-2009», авторы-составители: Ишина В.И., Кочагин В.В, АСТ. Астрель. Москва, 2008.
17. Корешкова Т.А., Глазвков Ю.А. и др. «Математика. ЕГЭ-2009. Типовые тестовые задания». Издательство «Экзамен, Москва, 2009».
18. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко «Математика ЕГЭ-2009. Вступительные испытания». Легион. Ростов-на-Дону, 2008.
19. Под редакцией Лысенко. «Математика. Сборник тестов. ЕГЭ 2001-2009», Легион. Ростов-на-Дону, 2009 г.
20. Е.М. Родионов. «Математика. Решение задач с параметрами». Издательство НЦ ЭНАС, Москва, 2006
21. А.Г. Клово, Д.А. Мальцев «Математика. Сборник тестов по плану ЕГЭ 2009», Афина, Москва, 2009.
22. Материалы с сайтов: www.fipi.ru, www.mioo.ru, www.repetitors.info

Уважаемые коллеги!

Убедительно прошу вас не выкладывать материалы из этого пособия в интернет и, при использовании на занятиях, ссылаться на составителей. Буду рада, если это пособие окажется полезным вам в работе.

По всем вопросам обращайтесь: www.ege-guru.ru, liin@math-study.ru,
+7 (916) 257 4731, +7 (495) 772 6017
С уважением, Елена Любецкая

Курсы подготовки к ЕГЭ «Математика с человеческим лицом»

«Математика с человеческим лицом» Курсы подготовки к ЕГЭ. www.ege-guru.ru	
8 (916)257 4731	8 (495)7726017

ЕГЭ 11 класс, группы А, В

Достоинства курса: курс построен по принципу трех П: «Приятно, Понятно, Полезно». Вы обязательно поймете школьный курс математики и не потратите много времени.
Группы запускаются по мере набора учеников, с сентября по декабрь. В каждой группе работают 2 преподавателя и занимаются 8-10 учеников.
Внимание! Предлагаем скидки для учеников субботних групп!

Только цифры:

- Мы открываем 3-ий учебный год.
- За это время мы обучили более 120 человек.
- За все время существования ни один наш ученик не получил оценку «2».
- В прошлом году наименьший первичный балл, полученный нашими учениками на ЕГЭ, был равен 9.
- Средний первичный балл: 17 (соответствует школьной оценке «4»). Максимальный первичный балл: 32 (из 37 возможных).
- Мы напечатали 3 методических пособия с задачами и 1 книгу с изложением теории, закупили более 250 различных учебников и задачников по подготовке к ЕГЭ.
- У нас работают 6 преподавателей, мы проводили 5 различных тематических групп по математике для ребят с разным уровнем знаний и различными целями.
- В работе курсов участвуют 3 психолога.

ЕГЭ, 9 класс: математика + психология

Это особенная группа для ребят, имеющих значительные трудности с математикой. Очень редко фатальная неуспеваемость бывает проблемой только ученика. Обычно у ребят возникают конфликты с преподавателем, перемена школы, пропуски по болезни и многое другое, из-за этого теряется интерес к предмету, понижается самооценка. В группе мы разбираемся в причинах неуспеха, помогаем вернуть энтузиазм и веру в себя, выберем наиболее подходящий режим занятий.
Группу проводят два преподавателя: математик и психолог, занимаются 4-6 учеников. Занятия проходят по субботам. Группы запускаются по мере набора, с сентября по декабрь.

Только цифры:

Мы с гордостью представляем результаты работы группы в прошлом году: из 6 человек, большинству из которых грозила неаттестация, 2 ученика сдали экзамен на «4», 3 ученика — на «5» и один — на «3».

ЕГЭ 11 класс, группа С

На занятиях мы будем:

- заниматься по книжкам известных авторов, развивающим математическое мышление;
- решать задачи из вариантов ЕГЭ;
- решать задачи по геометрии.

Обучение проводится в форме лекций 1 раз в неделю, и тренингов — 2 раза в месяц.
Группу ведут два преподавателя, занимаются 5-6 человек.

Только цифры:

В прошлом году работала одна группа из 6 человек. Ребята сдали со следующими результатами(сертификационные баллы): 82, 82, 76, 68, 66, 62.

«Геометрия в картинках»

Курс, позволяющий быстро перейти от теории к практике. Идея курса состоит в том, что важнее не доказывать теоремы, а «узнавать» и применять в задачах основные геометрические свойства. На лекциях мы рассматриваем чертежи к типовым задачам и учимся узнавать теоремы. Курс читался на двух интенсивах, затем из учеников интенсивов была организована группа-прктикум по решению задач.
Группа проводится одним преподавателем (автором обучающих картинок), занимаются 5-6 человек. Занятия проходят 1 раз в неделю.

ЕГЭ по химии

Для ребят, поступающих в химические и медицинские ВУЗы.

«Мега-продленка»

Консультации по любой математике (школьной и высшей) 1 раз в неделю по будним дням. Курс понравится ребятам, имеющим потребность обсуждать и консультироваться по разным областям математики. Также это хорошая возможность познакомиться с нашей методикой и преподавателями. Самая недорогая группа.

Оглавление: